Задачи по теме «Метрические пространства»

1. Пусть функция ρ – неотрицательная симметричная функция на *X*×*X*, удовлетворяющая неравенству треугольника. Пусть для некоторых *x,y*, принадлежащих *X*, ρ(*x,y*)=0. Следует ли из этого, что для произвольного *z*, принадлежащего *X*, ρ(*x,z*)= ρ(*y,z*)?
2. Пользуясь неравенством треугольника, докажите, что для произвольных элементов *x1,2,…,n* метрического пространства выполнено *неравенство многоугольника* ρ(*x1*, *xn*)≤ ρ(*x1*, *x2*)+ ρ(*x2*, *x3*)+…+ ρ(*xn-1*, *xn*)
3. Пользуясь неравенством треугольника, докажите, что для произвольных элементов метрического пространства *x,y,z* выполнено *второе неравенство треугольника* ρ(*x*,*z*)≥|ρ(*x*,*y*)- ρ(*y*,*z*)|
4. Пользуясь неравенством треугольника, докажите, что для произвольных элементов метрического пространства *a,b,c,d* выполнено *неравенство четырёхугольника* .
5. Пусть *M1* и *M2* – метрические пространства, расстояния на которых задаются с помощью функций ρ1 и ρ2 соответственно. Докажите, что на декартовом произведении *M1*×*M2* расстояние может быть задано с помощью формулы ρ(*X*,*Y*)= max{ρ1(*x1*,*y1*), ρ2(*x2*,*y2*)} Здесь *x1*,*y1* – элементы *M1*, *x2*,*y2* – элементы *M2*, *X*=(*x1*, *x2*), *Y=*(*y1*, *y2*) – элементы декартова произведения *M1*×*M2*.
6. Пусть *M1* и *M2* – метрические пространства, расстояния на которых задаются с помощью функций ρ1 и ρ2 соответственно. Докажите, что на декартовом произведении *M1*×*M2* расстояние может быть задано с помощью формулы ρ(*X*,*Y*)= ρ1(*x1*,*y1*)+ ρ2(*x2*,*y2*) Здесь *x1*,*y1* – элементы *M1*, *x2*,*y2* – элементы *M2*, *X*=(*x1*, *x2*), *Y=*(*y1*, *y2*) – элементы декартова произведения *M1*×*M2*.
7. Пусть *M1* и *M2* – метрические пространства, расстояния на которых задаются с помощью функций ρ1 и ρ2 соответственно. Докажите, что на декартовом произведении *M1*×*M2* расстояние может быть задано с помощью формулы  Здесь *x1*,*y1* – элементы *M1*, *x2*,*y2* – элементы *M2*, *X*=(*x1*, *x2*), *Y=*(*y1*, *y2*) – элементы декартова произведения *M1*×*M2*.
8. Пусть  и - метрические пространства. Докажите, что на декартовом произведении  расстояние между элементами и , где , , может быть задано, в частности с помощью любой из трёх формул:  , , . Понятно ли, что эта задача – это просто переформулировка предыдущих трёх в других терминах?
9. Докажите, что введённые в предыдущей задаче расстояния удовлетворяют неравенствам . Приведите примеры, когда выполняются равенства.
10. Докажите, что расстояние в арифметическом пространстве может быть задано, в частности с помощью любой из трёх формул:  , [доказано на лекции, повторить], . Докажите, что эти расстояния удовлетворяют неравенствам 
11. Пусть - метрическое пространство, элементами которого являются бесконечные последовательности  таких, что  («квадратично суммируемые»), а метрика задаётся формулой . Докажите, что формула для расстояния корректно определена (т.е. ряд сходится), и что выполняются все аксиомы метрического пространства [доказано на лекции, повторить].
12. Пусть - метрическое пространство, элементами которого являются бесконечные последовательности  таких, что  («абсолютно суммируемые»), а метрика задаётся формулой . Докажите, что формула для расстояния корректно определена (т.е. ряд сходится), и что выполняются все аксиомы метрического пространства.
13. Пусть - метрическое пространство, элементами которого являются ограниченные бесконечные последовательности , а метрика задаётся формулой . Докажите, что формула для расстояния корректно определена, и что выполняются все аксиомы метрического пространства.
14. Докажите, что , причём каждое включение строгое.
15. Докажите, что . Приведите пример, когда выполняется равенство.
16. Докажите, что . Приведите пример, когда выполняется равенство.
17. Пусть - метрическое пространство, элементами которого являются непрерывные на  функции , а метрика задаётся формулой . Докажите, что формула для расстояния корректно определена, и что выполняются все аксиомы метрического пространства.
18. Пусть (другое обозначение - )- метрическое пространство, элементами которого являются *k* раз непрерывно дифференцируемые на  функции , а метрика задаётся формулой , где  - *j*-я производная функции , а под нулевой производной понимается сама функция. Докажите, что формула для расстояния корректно определена, и что выполняются все аксиомы метрического пространства [доказано на лекции, повторить].

Теперь задачи, которых я не задавал, но было бы неплохо, если бы вы над ними подумали (часть из них есть в книжке).

1. Пусть X – произвольное непустое множество. Докажите, что функция задаёт на этом множестве метрику (такая метрика называется *дискретной*).
2. Докажите, что если для некоторого элемента *a* метрического пространства *M* значения ρ(*x,a*) при всевозможных *x*, принадлежащих *M*, в совокупности ограничены (т.е. не превосходят некоторой константы *A*), то значения ρ(*x,y*) при произвольных *x,y* из *M* такжене превосходят некоторой константы *B*. Как связаны *A* и *B*? Перепишите данное утверждение, используя логическую символику. (Такое метрическое пространство называется *ограниченным*, а величина называется его *диаметром*.)
3. Для каких наименьших значений *k*1,2,3 для произвольных выполнены неравенства , , ? Приведите примеры, когда выполняются равенства.
4. Пусть - метрическое пространство, элементами которого являются сходящиеся бесконечные последовательности , а метрика задаётся формулой . Докажите, что формула для расстояния корректно определена, и что выполняются все аксиомы метрического пространства.
5. Пусть - метрическое пространство, элементами которого являются бесконечные последовательности , а метрика задаётся формулой . Докажите, что формула для расстояния корректно определена, и что выполняются все аксиомы метрического пространства.
6. Докажите, что , причём каждое включение строгое.
7. Можно ли на прямой **R** ввести метрику по формуле ?
8. Для каких функций *f*: **R** → **R** формула  будет определять метрику на **R**?
9. Пусть *M*=(*X*,ρ) – метрическое пространство. Для каких функций *f*:*X* →*X*формула  будет определять метрику на *X*?
10. Можно ли на прямой **R** ввести метрику по формуле ?
11. Какое свойство функции *f*: **R** → **R** гарантирует нам, что функция  будет определять метрику на **R**?
12. Пусть *M*=(*X*,ρ) – метрическое пространство. Какое свойство функции  гарантирует нам, что функция  будет определять метрику на *X*, каково бы ни было пространство *M*?

Задачи, рассмотренные на последней лекции и семинарском занятии:

31. Докажите, что *неотрицательная непрерывная* функция , удовлетворяющая условию , тождественно равна нулю на .

32. - метрическое пространство, элементами которого являются непрерывные на функции , а расстояние задаётся формулой . Докажите, что при таком определении выполнены все аксиомы метрического пространства.

33. - метрическое пространство, элементами которого являются непрерывные на функции , а расстояние задаётся формулой . Докажите, что при таком определении выполнены все аксиомы метрического пространства.

34. Для каких наименьших значений *k*1,2,3 для произвольных выполнены неравенства , , ? Приведите примеры, когда выполняются равенства.

35. Пусть метрическое пространство является одновременно линейным пространством. Можно ли утверждать, что произвольное подпространство этого пространства в смысле линейной алгебры является одновременно подпространством метрического пространства? Можно ли утверждать, что произвольное подпространство этого пространства как метрического является одновременно подпространством в смысле линейной алгебры?

Ещё одна задача, продолжение первой:

36. Пусть функция ρ – неотрицательная симметричная функция на *X*×*X*, удовлетворяющая неравенству треугольника. Докажите, что равенство ρ(*x,y*)=0 задаёт на *X* отношение эквивалентности. Докажите, что функция ρ задаёт метрику на множестве классов эквивалентности.